САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

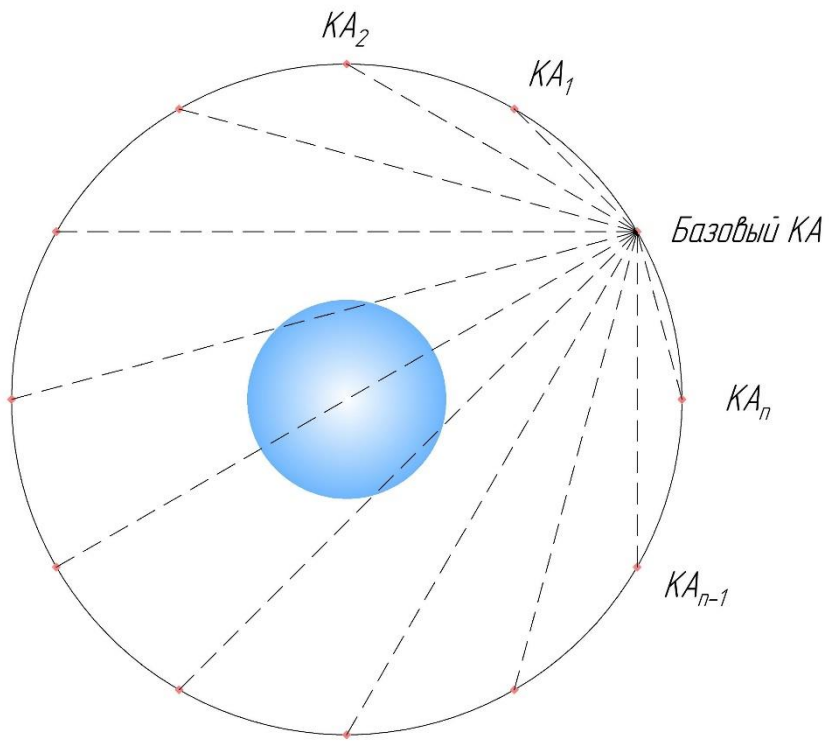
Алгоритм определения относительного положения космических аппаратов

Подготовила: студентка
группы 1415-240301D
Ушакова Ю.В.
Научный руководитель: Крамлих А.В.

Самара, 2022

Постановка задачи определения относительного положения космических аппаратов

Цель работы – реализовать и исследовать алгоритм определения относительного положения космических аппаратов (КА).



Задачи:

1. Проанализировать существующие алгоритмы определения параметров движения КА;
2. Установить набор определяемых и измеряемых параметров;
3. Реализовать алгоритм;
   3. 1. Прогноз движения НКА ГНСС (для определения координат базового КА);
   3. 2. Модель измерений псевдодальности;
   3. 3. Прогноз движения группировки по круговой орбите;
4. Исследовать алгоритм определения относительного положения КА.
   4.1 На базе МНК
   4.2 На базе фильтра Калмана

Модель измерений псевдодальности между двумя КА D_i:

$$S\colon\ D = \sqrt{\left(x_1^{\text{баз}} - x_2\right)^2 + \left(y_1^{\text{баз}} - y_2\right)^2 + \left(z_1^{\text{баз}} - z_2\right)^2} + w.$$

Прогноз движения НКА ГЛОНАСС проводится методом численного интегрирования дифференциальных уравнений движения центра масс. Эти уравнения движения определены в виде следующей системы:

$$\frac{dx_0}{dt} = Vx_0,$$

$$\frac{dy_0}{dt} = Vy_0,$$

$$\frac{dz_0}{dt} = Vz_0,$$

$$\frac{dVx_0}{dt} = -G\hat{M}\cdot\bar{x}_0 - \frac{3}{2}J_2^0 G\hat{M}\cdot\bar{x}_0\rho^2(1-5\bar{z}_0^{\,2}) + j_{x0c} + j_{x0л},$$

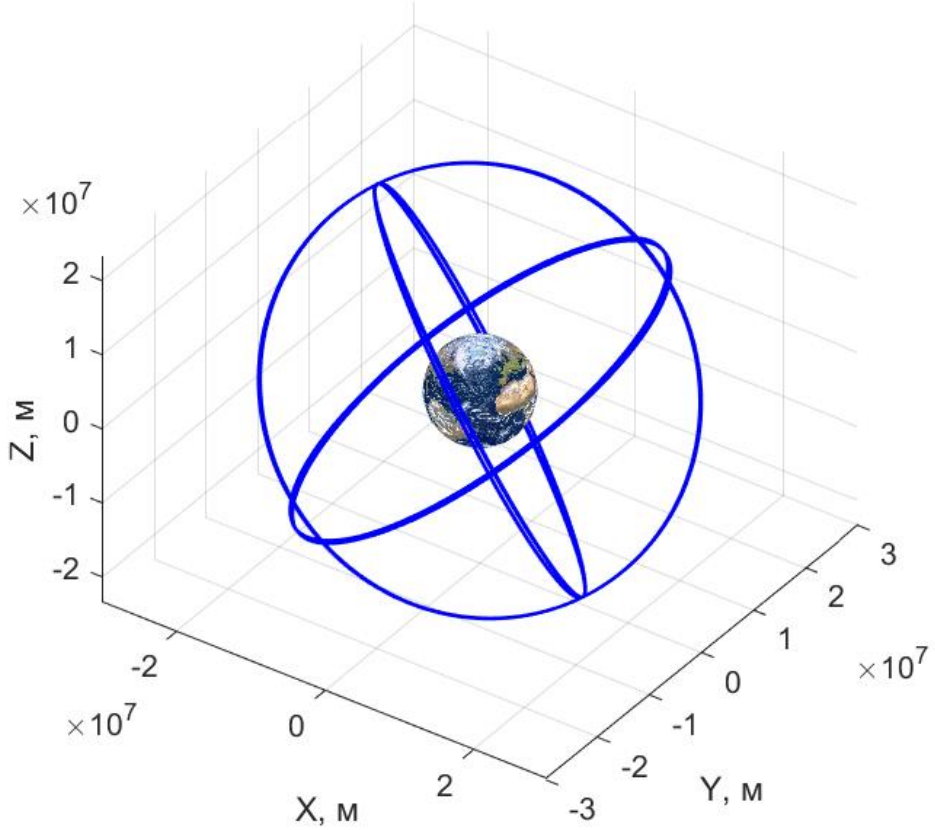
$$\frac{dVy_0}{dt} = -G\hat{M}\cdot\bar{y}_0 - \frac{3}{2}J_2^0 G\hat{M}\cdot\bar{y}_0\rho^2(1-5\bar{z}_0^{\,2}) + j_{y0c} + j_{y0л},$$

$$\frac{dVz_0}{dt} = -G\hat{M}\cdot\bar{z}_0 - \frac{3}{2}J_2^0 G\hat{M}\cdot\bar{z}_0\rho^2(3-5\bar{z}_0^{\,2}) + j_{z0c} + j_{z0л},$$

Расчёт ускорений от лунных $j_{x0л}, j_{y0л}, j_{z0л}$ и солнечных $j_{x0c}, j_{y0c}, j_{z0c}$ гравитационных возмущений проведён согласно интерфейсному контрольному документу ГЛОНАСС.

Начальными условиями являются координаты центра масс НКА и составляющие вектора скорости, которые находятся из системы:

$$
\begin{cases}
x_0 = R(\cos\Omega_0 \cos u_0 - \sin\Omega_0 \sin u_0 \cos i_0) \\
y_0 = R(\sin\Omega_0 \cos u_0 + \cos\Omega_0 \sin u_0 \cos i_0) \\
z_0 = R \sin u_0 \sin i_0 \\
V_{x_0} = V_{r0}(\cos\Omega_0 \cos u_0 - \sin\Omega_0 \sin u_0 \cos i_0) - \\
-V_{n0}(\cos\Omega_0 \sin u_0 + \sin\Omega_0 \cos u_0 \cos i_0) \\
V_{y_0} = V_{r0}(\sin\Omega_0 \cos u_0 + \cos\Omega_0 \sin u_0 \cos i_0) - \\
-V_{n0}(\sin\Omega_0 \sin u_0 - \cos\Omega_0 \cos u_0 \cos i_0) \\
V_{z_0} = V_{r0} \sin u_0 \sin i_0 + V_{n0} \cos u_0 \sin i_0
\end{cases}
$$



Результат моделирования движения 24 НКА ГНСС ГЛОНАСС

Эфемериды для прогнозирования ГЛОНАСС взяты с сайта: https://www.glonass-iac.ru/gps/ephemeris/

Для расчёта координат НКА ГНСС GPS по данным оперативной информации, передаваемой НКА, используется алгоритм, представленный в интерфейсном контрольном документе GPS:

$$\begin{cases} x_k = x'_k \cos\Omega_k - y'_k \cos i_k \sin\Omega_k \\ y_k = x'_k \sin\Omega_k + y'_k \cos i_k \cos\Omega_k \\ z_k = y'_k \sin i_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_k = r_k \cos u_k \\ x'_k = r_k \sin u_k \end{cases}$$

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe}$$

$$i_k = i_0 + \delta i_k + (IDOT)t_k;$$

$$r_k = A(1 - e\cos E_k) + \delta r_k$$

$$u_k = \Phi_k + \delta u_k$$

$$\delta u_k = C_{us}\sin 2\Phi_k + C_{uc}\cos 2\Phi_k$$

$$\delta r_k = C_{rs}\sin 2\Phi_k + C_{rc}\cos 2\Phi_k$$

$$\delta i_k = C_{is}\sin 2\Phi_k + C_{ic}\cos 2\Phi_k$$

$$\Phi_k = v_k + \omega$$

$$v_k = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E_k}{2}\right)$$

$$M_k = E_k - e\sin E_k$$

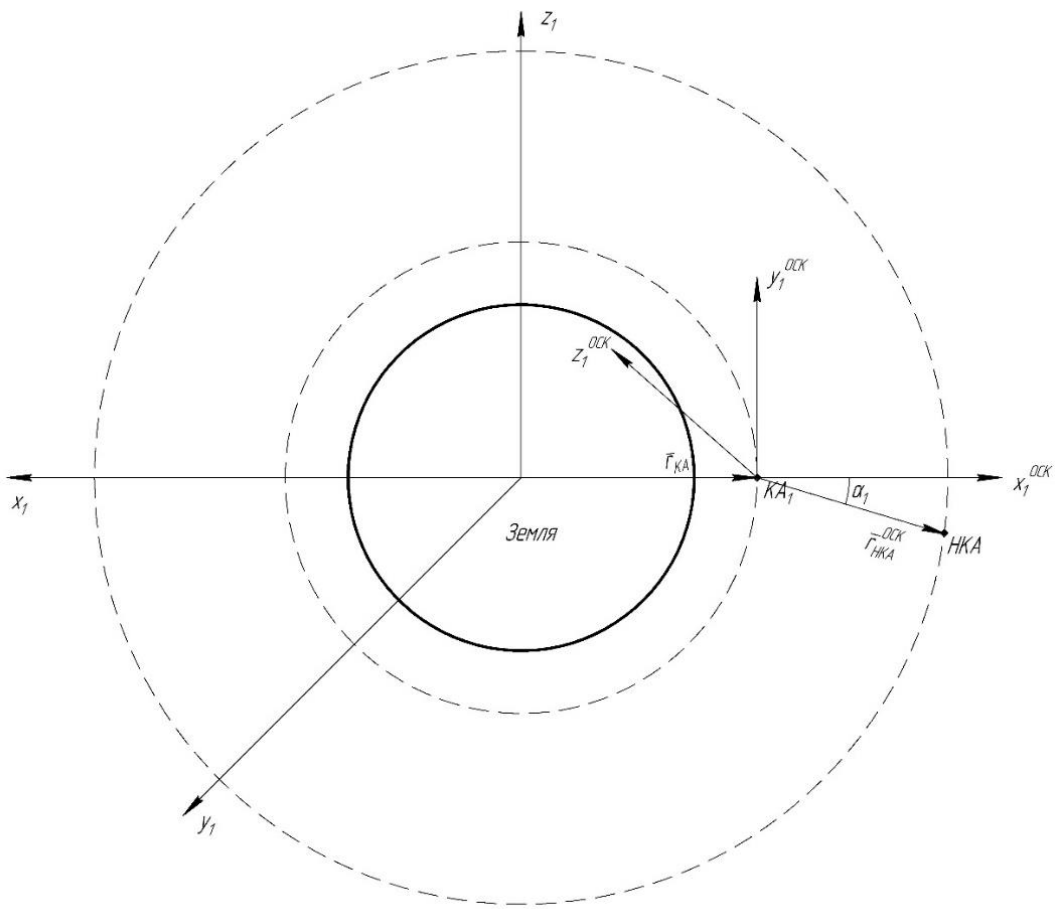
$$M_k = M_0 + nt_k$$

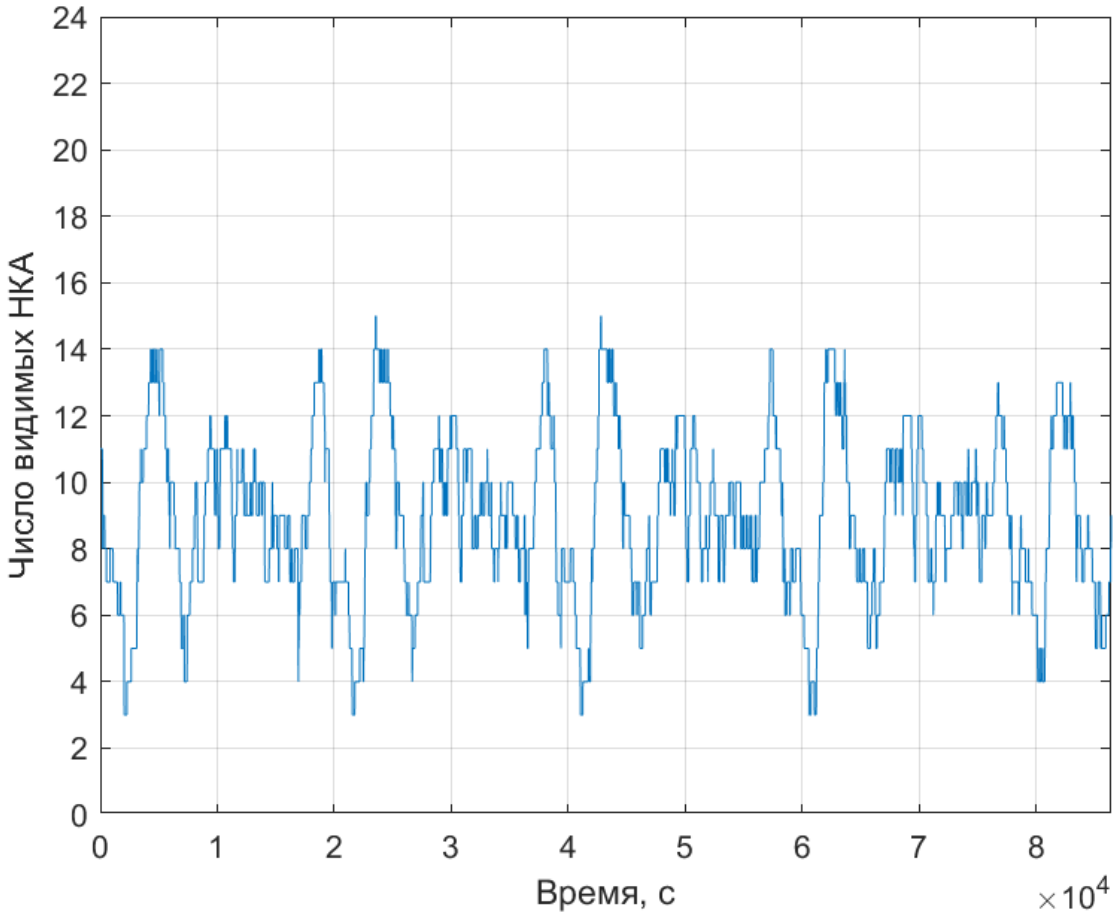
$$n = n_0 + \Delta n$$

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{A^3}},$$

$$t_k = t - t_{oe};$$

Определение количества НКА в зоне видимости базового КА





Если $-\frac{\pi}{2} < \alpha_{1j} < \frac{\pi}{2}$ и $x_{НКА}^{ОСК} > 0$, то взаимная видимость между КА и НКА присутствует.

$$\alpha_{1j} = \arccos\left(\frac{x_{НКАj}^{ОСК}}{r_{НКАj}^{ОСК}}\right), \qquad j = \overline{1,24}.$$

Стандартный алгоритм определения координат КА при помощи измерений псевдодальностей (базовый КА–НКА) основывается на процедуре линеаризации уравнений измерений в окрестности априорного решения с последующим применением метода наименьших квадратов для возникающей задачи оценивания.

Исходные данные:

Априорные геоцентрические координаты базового КА $\mathbf{q}^{\mathbf{SC}'} = \begin{pmatrix} x^{SC'} & y^{SC'} & z^{SC'} \end{pmatrix}^T$.

Измерения псевдодальностей между базовым КА и НКА $\left\{D_\rho^{(i)}\right\}$.

Координаты НКА $\left\{\mathbf{q}^{\mathbf{sat_i}}\right\}$.

Уравнения измерений: $\widehat{D}_{\rho}^{(i)} = \rho^{(i)} + \Delta\rho_i^s$,

где $\rho^{(i)}$ – истинная дальность между базовым КА и НКА, м; $\Delta\rho_i^s$ – погрешность измерений, м.

Производится линеаризация уравнений измерений. Формируются расчётные измерения дальности:

$$d_{\rho}^{(i)} = \widehat{D}_{\rho}^{(i)} - \rho_{\text{расч}}^{(i)} \approx h_i^T \eta + \Delta\rho_i^s;$$

$$h_i^T = \begin{pmatrix} \dfrac{x^{sat_i} - x^{SC'}}{\rho_{\text{расч}_i}} & \dfrac{y^{sat_i} - y^{SC'}}{\rho_{\text{расч}_i}} & \dfrac{z^{sat_i} - z^{SC'}}{\rho_{\text{расч}_i}} & 1 \end{pmatrix};$$

$$\rho_{\text{расч}_i} = \sqrt{\left(x^{sat_i} - x^{SC'}\right)^2 + \left(y^{sat_i} - y^{SC'}\right)^2 + \left(z^{sat_i} - z^{SC'}\right)^2};$$

$\eta = (\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z \quad \Delta\rho_\tau)^T$ – вектор оцениваемых параметров.

Модель задачи оценивания: $d = \begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \\ \dots \\ h_M^T \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} \Delta\rho_1^s \\ \Delta\rho_2^s \\ \dots \\ \Delta\rho_M^s \end{pmatrix} = H\eta + r$

Решение задачи по методу наименьших квадратов имеет вид: $\hat{\eta} = (H^T W^{-1} H)^{-1} H^T W^{-1} d$.

Оценка погрешности на итерации: $e = q_{n_{j+1}} - q_j^{SC'}$

Итерационная процедура продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $e < l$, где l – необходимая точность.

Моделирование измерений дальности и вычисление по ним координат ведомого КА

Имеются смоделированные известные координаты базового КА x_1, y_1, z_1 и измерения дальности между базовым КА и ведомым КА D_i. Пусть первый (базовый) и второй (ведомый) КА движутся по одной орбите с углом φ между ними. Истинные координаты ведомого КА вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_2 = r(\cos\Omega\cos u_2 - \sin\Omega\sin u_2\cos i) \\ y_2 = r(\sin\Omega\cos u_2 + \cos\Omega\sin u_2\cos i)\,; \\ z_2 = r\sin u_2\sin i \end{cases} \quad (1)$$

$$u_2 = u_1 + \varphi$$

По известным координатам базового КА и измерениям дальности определим координаты второго КА. Для этого необходимо вычислить угол между КА φ.

Для вычисления угла φ необходимо применить метод наименьших квадратов.

Модель измерений имеет вид:

$$S\colon\ y = D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (2)$$

Подставляя выражения для x_2, y_2, z_2 (1) в уравнение (2), получим:

$$y = \Big[\big(x_1 - r(\cos(u_1+\varphi)\cos\Omega - \sin(u_1+\varphi)\sin\Omega\cos i)\big)^2 +$$

$$+\big(y_1 - r(\cos(u_1+\varphi)\sin\Omega + \sin(u_1+\varphi)\cos\Omega\cos i)\big)^2 +$$

$$+(z_1 - r\sin(u_1+\varphi)\sin i)^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее определяем **оценку $\hat{\varphi}$** методом наименьших квадратов.

Найденное значение $\hat{\varphi}$ подставляем в выражения (1) и вычисляем координаты второго КА.

Линеаризация системы и вычисление оценки $\hat{\varphi}$ методом наименьших квадратов.

$$\Delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\Delta\varphi;$$

$$\Delta y = C\Delta x;$$

$$C = \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right);\ \Delta x = \Delta\varphi.$$

$$\Delta r = \Delta y + w.$$

Линеаризованное уравнение:

$$\Delta r^{(0)} = C^{(0)}\varphi^{(0)} + w; \qquad C^{(0)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^{(0)}_{(x_1,y_1,z_1,u_1)_1} \\ \dots \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^{(0)}_{(x_{11},y_{11},z_{11},u_{11})_N} \end{vmatrix}.$$

Вычисление значений вектора $\Delta r^{(0)}$:

$$\Delta r^{(0)} = \begin{vmatrix} r\left((x_1,y_1,z_1,u_1)_1\right) - y^{(0)}((x_1,y_1,z_1,u_1)_1) \\ \dots \\ r\left((x_1,y_1,z_1,u_1)_N\right) - y^{(0)}((x_1,y_1,z_1,u_1)_N) \end{vmatrix}.$$

Вычисление значений вектора $\Delta x^{(0)}$:

$$\Delta x^{(0)} = \Delta\varphi^{(0)} = \left(C^{(0)T}C^{(0)}\right)^{-1}C^{(0)T}\Delta r^{(0)}.$$

Вычисление следующего приближения:

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(0)} + \Delta\varphi^{(0)}.$$

Вычисления проводятся до тех пор, пока не выполнится условие

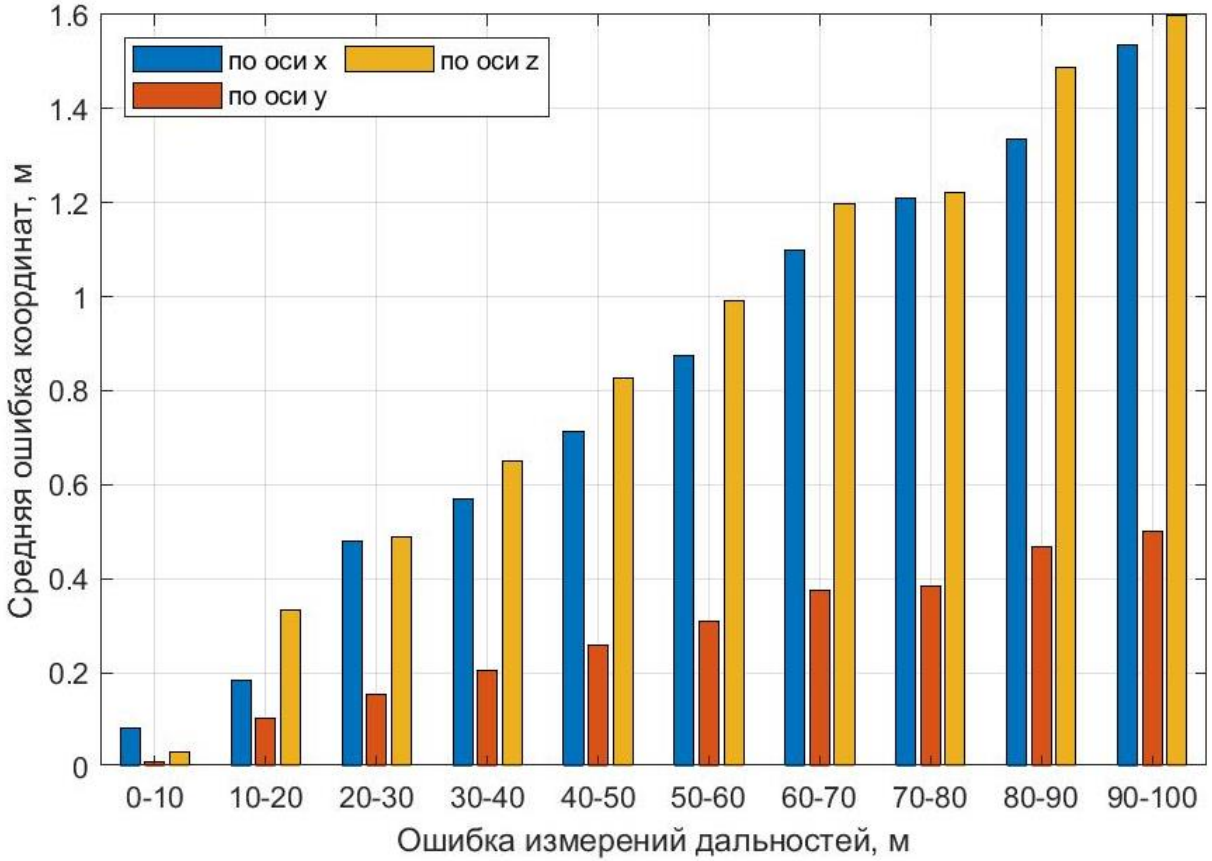
$$\|\Delta x\| < \varepsilon_\varphi.$$

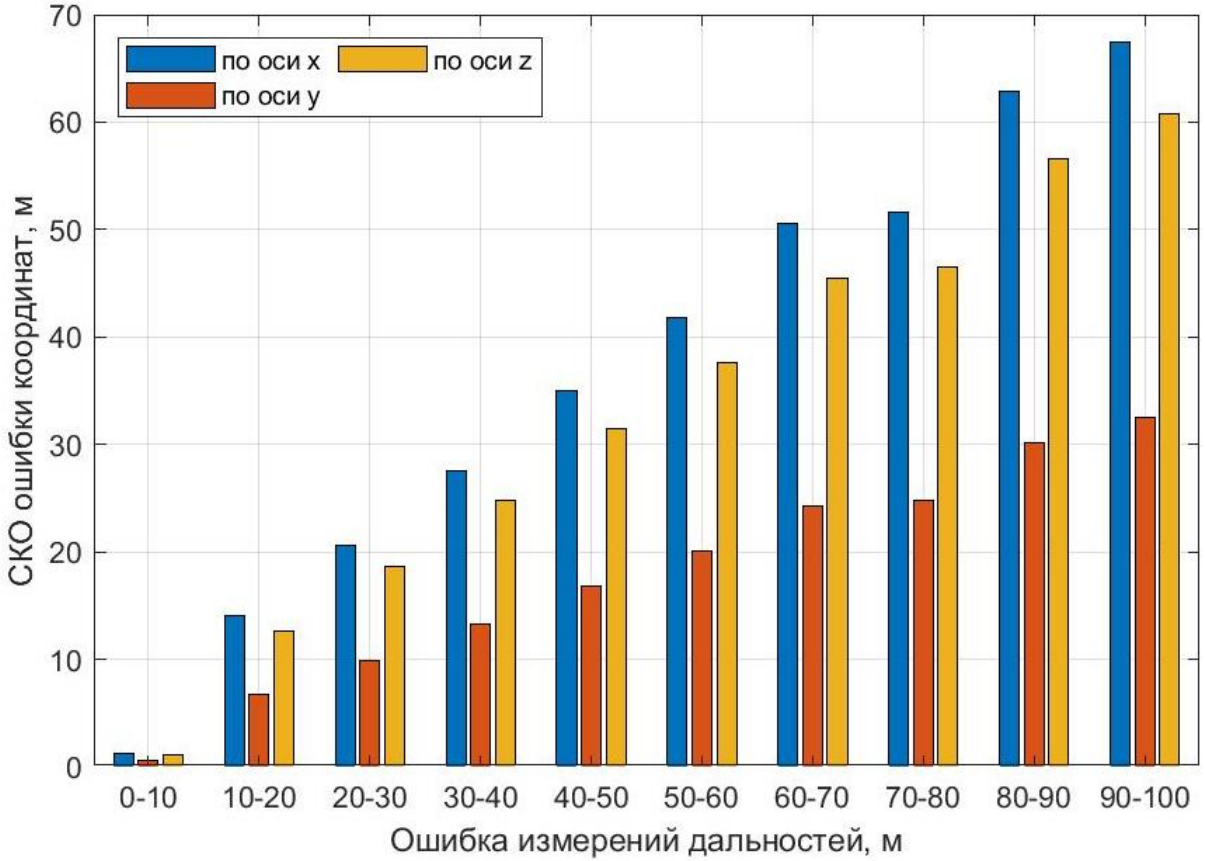
Моделирование измерений дальности и вычисление по ним координат ведомого КА (МНК)

Вычислим абсолютную погрешность найденных координат ведомого КА:

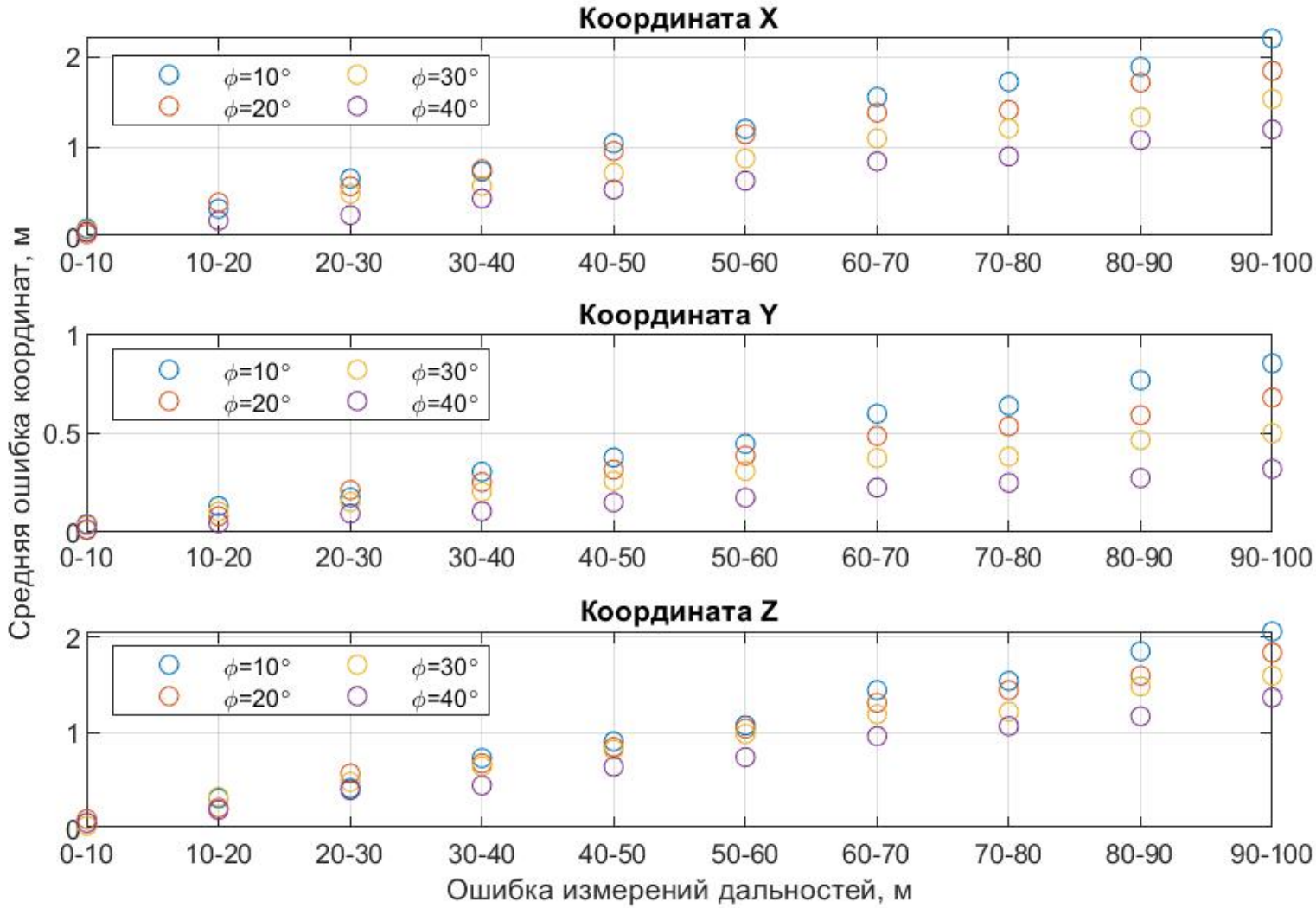
$$\Delta_x = |x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}|.$$

Найдём среднее значение и СКО погрешности. Результаты моделирования для различной точности измерений дальности:





Зависимость средней ошибки определения координат ведомого КА от величины угла между ним и базовым КА.

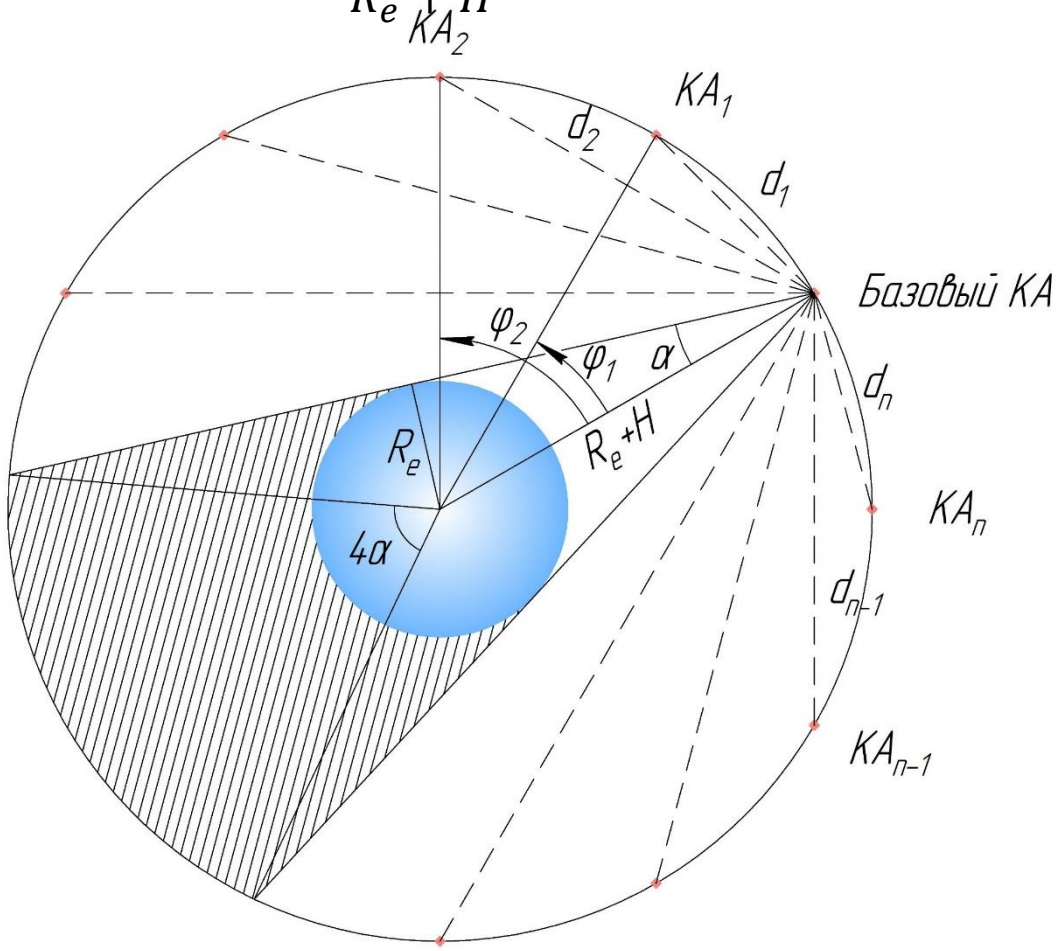


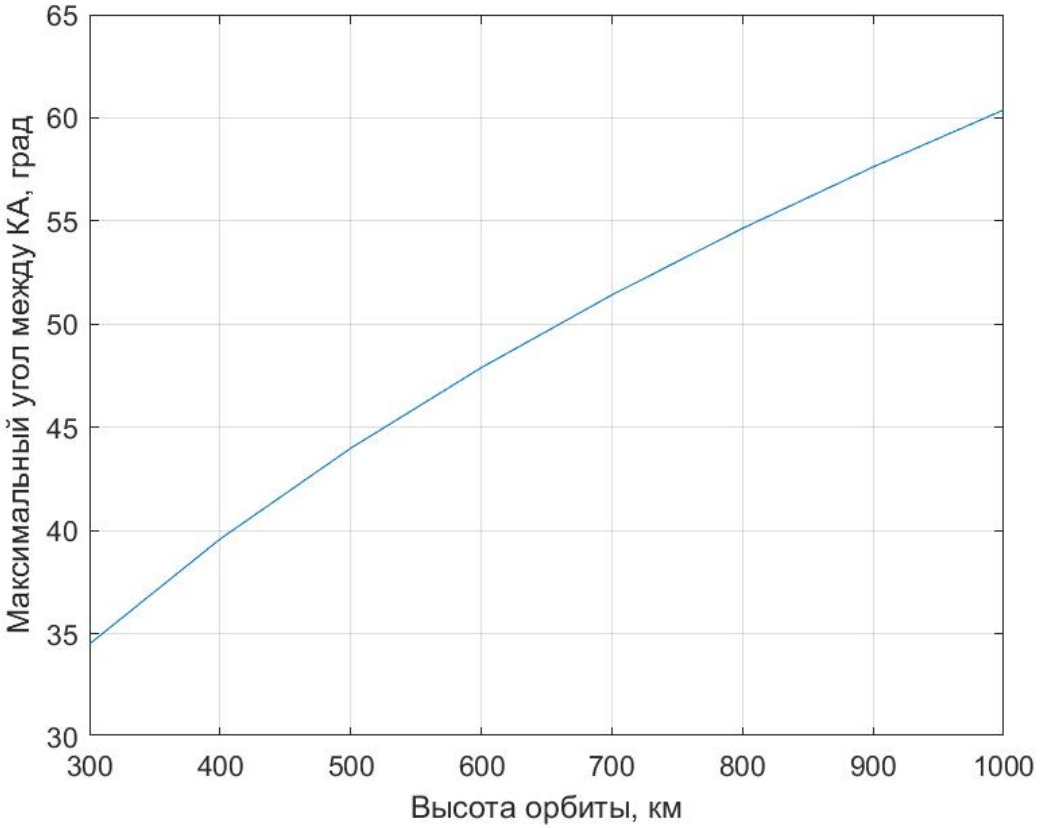
Зона взаимной видимости между КА

$$\alpha = \arcsin\frac{R_e}{R_e + H}$$

$$\varphi_n \leq 180° - 2\alpha$$

$$\varphi_{max} = 180° - 2\alpha$$





Высота орбиты, км	Число базовых КА
300	6
400	5
500	5
600	4
700	4
800	4
900	4
1000	3

Зависимость максимального угла φ от высоты орбиты

Вычисление оценки $\hat{\varphi}$ с помощью дискретного фильтра Калмана.

Формулы для линейных систем:

$$G: x_{i+1} = \varphi_i = A_{i+1,i} x_i$$
$$S: y_i = C_i x_i$$
$$Q: r_i.$$

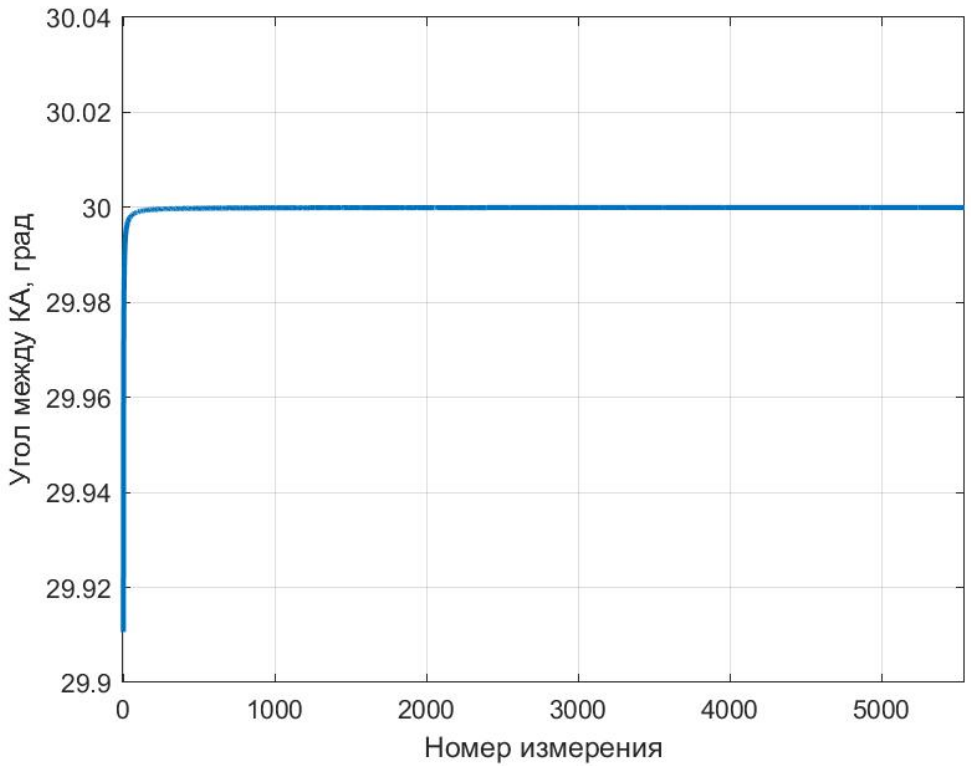
1) Этап фильтрации:

$$\widehat{x_i} = \tilde{x}_i + K_{\widehat{x_i}} C^T K_w^{-1} (r_i - C\tilde{x}_i)$$
$$K_{\widehat{x_i}} = \left(C^T K_w^{-1} C + K_{\tilde{x}_i}^{-1}\right)^{-1}$$

2) Этап прогноза:

$$\tilde{x}_{i+1} = A_{i+1,i} \widehat{x_i}$$
$$K_{\tilde{x}_{i+1}} = A_{i+1,i}\, K_{\widehat{x_i}}\, A_{i+1,i}^T$$

СКО ошибки дальностей σ, м	M_x, м	σ_x, м	M_y, м	σ_y, м	M_z, м	σ_z, м
5	0,0369	1,338	0,0029	0,6459	0,0070	1,200
10	0,0397	1,441	0,0031	0,6960	0,0075	1,293
15	0,0410	1,485	0,0032	0,7173	0,0077	1,333
20	0,0278	1,009	0,0022	0,4872	0,0053	0,905



Заключение

1. Реализован алгоритм прогнозирования координат НКА ГНСС ГЛОНАСС/GPS в соответствии с интерфейсными контрольными документами.

2. Для базового КА реализован алгоритм определения его положения по псевдодальностям, измеряемыми до НКА ГНСС.

3. С использованием метода наименьших квадратов реализован алгоритм определения относительного положения ведомого КА. Получены оценки ошибок определения координат ведомого КА в зависимости от ошибки измерения псевдодальности между ведомым КА и базовым. Если ошибка измерений псевдодальности не превысит 10 м, то ошибка определения координат ведомого КА не превысит 3 м.

4. Проведен анализ минимального количества базовых КА, которые обеспечат прямую видимость «базовый КА-ведомый КА» по всей плоскости орбиты, в зависимости от высоты орбиты.

5. С использованием дискретного фильтра Калмана реализован алгоритм определения относительного положения ведомого КА. Получены оценки ошибок определения координат ведомого КА в зависимости от ошибки измерения псевдодальности между ведомым КА и базовым. Если ошибка измерений псевдодальности не превысит 20 м, то ошибка определения координат ведомого КА не превысит 3 м.

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

БЛАГОДАРЮ
ЗА ВНИМАНИЕ