

## РЕЗОНАНСНОЕ ДВИЖЕНИЕ НАНОСПУТНИКА СТАНДАРТА CUBESAT НА НИЗКИХ КРУГОВЫХ ОРБИТАХ

И. В. БЕЛОКОНОВ, И. А. ТИМБАЙ, У. М. ОРАЗБАЕВА

*Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева  
(Самарский университет),  
443086, Самара, Россия  
E-mail: timbai@mail.ru*

Исследуются резонансные режимы движения относительно центра масс аэродинамически стабилизированного наноспутника стандарта CubeSat на низких круговых орбитах. Для наноспутника CubeSat, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, аэродинамический момент зависит от пространственного угла атаки и угла собственного вращения, что создает предпосылки возникновения резонанса. Резонанс проявляется в резком изменении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, когда линейная целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю. Получены формулы для определения критического значения продольной угловой скорости наноспутника, при котором выполняются условия возникновения резонансного движения.

**Ключевые слова:** *наноспутник стандарта CubeSat, аэродинамический момент, резонансный режим движения, угол атаки*

Большинство наноспутников запускается на низкие околоземные орбиты, где аэродинамический момент является значимым и используется для пассивной стабилизации наноспутника по вектору скорости движения центра масс [1–3].

Следует отметить, что обусловленное аэродинамическим моментом угловое ускорение наноспутника значительно выше, чем спутника с большими размерами и массой (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости и объемной плотности). Например, отношение углового ускорения наноспутника (НС) стандарта CubeSat 1U ( $0,1 \times 0,1 \times 0,1 \text{ м}^3$ ) и мини-спутника, линейные размеры которого в 10 раз превышают размеры указанного, определяется 100-кратным обратным отношением их объемных плотностей (при одинаковых значениях относительного запаса статической устойчивости).

Резонансные режимы движения космических аппаратов в атмосферной среде исследуются в работах [4–6]. При этом рассматриваются космические аппараты, предназначенные для неуправляемого спуска в атмосфере, которые, как правило, относятся к классу осесимметричных тел вращения. Однако из-за конструктивных особенностей, неточности изготовления, обгарания теплозащитного покрытия возникает малая инерционно-массовая и геометрическая асимметрия, наличие которой и создает предпосылки возникновения резонанса.

В настоящей статье исследуется возможность возникновения резонансных режимов движения, обусловленных форм-фактором прямоугольного параллелепипеда при орбитальном полете наноспутников формата CubeSat. Аэродинамический момент наноспутника CubeSat, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, зависит от пространственного угла атаки ( $\alpha$ ) и угла собственного вращения ( $\varphi$ ). Это создает предпосылки возникновения резонанса, который проявляется в резком изменении амплитуды колебаний по пространственному углу атаки, когда линейная целочисленная комбинация частоты колебаний угла  $\alpha$  и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю. Это в значительной степени влияет на условия достижения целевых показателей и уменьшает время жизни наноспутника на орбите.

Полагая, что обтекание наноспутника является свободномолекулярным и удар молекул газа абсолютно неупругий, аэродинамическое угловое ускорение НС CubeSat можно определить выражением [3]

$$M_{\alpha}(\alpha, \varphi, H) = m_0(H)(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) \sin \alpha, \quad (1)$$

где  $m_0(H) = -\Delta \bar{x} c_0 S l q(H) / J_n$ ;  $k_s$  — отношение площади одной из боковых поверхностей к характерной площади НС;  $\Delta \bar{x} = \Delta x / l$  — относительный запас статической устойчивости;  $\Delta x$  — запас статической устойчивости,  $l$  — характерная длина наноспутника;  $c_0 = 2,2$  — коэффициент лобового сопротивления;  $S$  — характерная площадь наноспутника,  $q(H) = \rho(H)[V(H)]^2 / 2$  — скоростной напор;  $V(H) = \sqrt{k_3 / (R_3 + H)}$  — скорость полета;  $H$  — высота полета,  $\rho(H)$  — плотность атмосферы,  $J_n = J_y = J_z$  — поперечный момент инерции наноспутника;  $k_3$  — гравитационный параметр Земли;  $R_3$  — радиус Земли.

Полагая в выражении (1)  $|\sin \varphi| + |\cos \varphi| \approx 1 + \frac{|\sin 2\varphi|}{1 + \sqrt{2}}$  (максимальная ошибка 0,015),

можно представить его в виде двух слагаемых: 1-го — основного, зависящего от параметров  $\alpha$  и  $H$ , и 2-го слагаемого, зависящего от параметров  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $H$  и дополняемого малым параметром  $\varepsilon$ :

$$M_{\alpha}(\alpha, \varphi, H) = M_{\alpha}(\alpha, H) + \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, H), \quad (2)$$

где

$$M_{\alpha}(\alpha, H) = m_0(H)(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha) \sin \alpha, \quad (3)$$

$$\Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, H) = m_0(H) k_s \frac{|\sin 2\varphi|}{1 + \sqrt{2}} \sin^2 \alpha. \quad (4)$$

Для приближенного анализа параметров движения зависимость (3) с достаточной точностью можно аппроксимировать синусоидальной зависимостью по углу атаки:

$$M_{\alpha}(\alpha, H) = m_0(H) m_{nk} \sin \alpha, \quad (5)$$

где  $m_{nk}$  — коэффициент синусоидальной аппроксимации методом наименьших квадратов ( $m_{nk} = 1,27$  при  $k_s = 1$ ;  $m_{nk} = 2,12$  при  $k_s = 2$ ;  $m_{nk} = 2,97$  при  $k_s = 3$ ).

Баллистический коэффициент наноспутников CubeSat определяется по формуле

$$\sigma_x(\alpha, \varphi) = c_0(|\cos \alpha| + k_s \sin \alpha(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|)) S / m, \quad (6)$$

где  $m$  — масса наноспутника.

С учетом представления аэродинамического углового ускорения НС CubeSat в виде (2) угловое движение динамически симметричного наноспутника на низких круговых орбитах относительно траекторной системы координат, пренебрегая орбитальной угловой скоростью, и изменение высоты полета наноспутника, учитывая (6), можно описать следующими уравнениями [4, 7]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + F(\alpha, H) &= \varepsilon \Phi_{\alpha}(\alpha, \varphi, H); \\ \dot{\varphi} &= R / \bar{J}_x - (G - R \cos \alpha) \cos \alpha / \sin^2 \alpha = \Phi_{\varphi}(\alpha, H); \\ \dot{H} &= -2\sigma_x(\alpha, \varphi) q(H) V(H) / g = \varepsilon \Phi_H(\alpha, \varphi, H); \\ F(\alpha, H) &= (G - R \cos \alpha)(R - G \cos \alpha) / \sin^3 \alpha - M_{\alpha}(\alpha, H), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $R = \bar{J}_x \omega_x = \text{const}$ ,  $G = R \cos \alpha + (\omega_y \sin \varphi + \omega_z \cos \varphi) \sin \alpha$  — отнесенные к поперечному моменту инерции  $J_n$  проекции вектора кинетического момента на продольную ось наноспутника и направление скорости центра масс;  $\bar{J}_x = J_x / J_n$ ,  $J_x$  — продольный момент инерции,

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции вектора угловой скорости наноспутника на оси связанной системы координат;  $g = g_3 (R_3 / (R_3 + H))^2$ ,  $g_3$  — ускорение свободного падения на Земле.

При выполнении условия  $R > G$  реализуется „обратная“ прецессия, при  $G > R$  — „прямая“ прецессия [8].

Для изучения резонансных режимов колебательной системы (7), в соответствии с предложенной в работе [9] процедурой, приведем систему к форме, содержащей медленно изменяющиеся и быстрые переменные типа быстро вращающихся фаз. Заменяем первое уравнение системы (7) на два уравнения первого порядка для амплитуды  $\alpha_{\max}$  и фазы  $y = \omega(t - t_0)$ . Множитель  $\omega$  выберем так, чтобы общее решение системы (7) при невозмущенном движении ( $\varepsilon = 0$ ) было  $2\pi$ -периодической функцией  $y$ . В результате получим систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\max} &= \varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, H); \quad \dot{y} = \omega(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, H); \\ \dot{\varphi} &= \Phi_{\varphi}(y, \alpha_{\max}, H), \quad \dot{H} = \varepsilon \Phi_H(y, \varphi, \alpha_{\max}, H). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, H) = \frac{\varepsilon}{F(\alpha_{\max}, H)} \left[ \Phi_{\alpha} \operatorname{sgn} \dot{\alpha} |\dot{\alpha}| - \left( \frac{\partial W(\alpha_{\max}, H)}{\partial H} - \frac{\partial W(\alpha, H)}{\partial H} \right) \Phi_H \right];$$

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2[W(\alpha_{\max}, H) - W(\alpha, H)]}; \quad W(\alpha, h) = \int F(\alpha, h) d\alpha;$$

$$\varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, H) = -\varepsilon 2\pi \operatorname{sgn} \dot{\alpha} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|} \right) \right] \Phi_H + \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_{\max}} \left( \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|} \right) \right] \Phi_{\alpha_{\max}} \right\};$$

$\omega(\alpha_{\max}, H) = \frac{2\pi}{T(\alpha_{\max}, H)}$  — частота собственных колебаний системы (7) при  $\varepsilon = 0$ ;

$T(\alpha_{\max}, H) = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|}$  — период колебаний;  $\alpha_{\max}, \alpha_{\min}$  — максимальный и минимальный углы атаки.

Введем в рассмотрение среднюю частоту собственного вращения [5]

$$\lambda(\alpha_{\max}, H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{\varphi}(y, \alpha_{\max}, H) dy. \quad (9)$$

Тогда уравнение для угла собственного вращения можно представить в виде

$$\dot{\varphi} = \lambda(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon L(y, \alpha_{\max}, H), \quad (10)$$

где  $\varepsilon L(y, \alpha_{\max}, H) = \Phi_{\varphi}(y, \alpha_{\max}, H) - \lambda(\alpha_{\max}, H)$ .

С учетом соотношения (10) система уравнений (8) преобразуется к системе с двумя вращающимися фазами:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\max} &= \varepsilon \Phi_{\alpha_{\max}}(y, \varphi, \alpha_{\max}, H), \quad \dot{y} = \omega(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon Y(y, \varphi, \alpha_{\max}, H), \\ \dot{\varphi} &= \lambda(\alpha_{\max}, H) + \varepsilon L(y, \alpha_{\max}, H), \quad \dot{H} = \varepsilon \Phi_H(y, \varphi, \alpha_{\max}, H). \end{aligned} \quad (11)$$

При возмущенном движении резонансы проявляются, когда целочисленная комбинация частоты колебаний пространственного угла атаки и средней частоты собственного вращения оказывается близкой к нулю  $O(\varepsilon)$  [10].

$$n\omega - p\lambda = O(\varepsilon), \quad (12)$$

где  $n, p$  — целые взаимно простые числа.

Резонансные соотношения частот можно определить при вычислении средней мощности, вносимой в систему возбуждающим моментом за время  $T$  [10]:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi_\alpha(\alpha, \varphi, H) \dot{\alpha} dt. \quad (13)$$

В случае невозмущенного движения  $\varepsilon = 0$ ,  $H = \text{const}$ , и, когда аэродинамическое угловое ускорение является синусоидальной функцией угла атаки (5), решение для пространственного угла атаки имеет вид [11]

$$\cos \alpha = A \text{cn}^2 \left[ \frac{yK}{\pi} + K, k \right] + x, \quad (14)$$

где  $\text{cn}(u)$  — эллиптический косинус,  $x = \cos \alpha_{\max}$ ,  $y = \omega(t - t_0)$ ,  $\omega = \pi\beta / K$ ,  $A = x_2 - x$ ,  $K = K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода,  $k = \sqrt{A/2\eta}$  — модуль эллиптических функций,  $\beta = \sqrt{-m_0 m_{nk} \eta}$ ,  $x_2 = \cos \alpha_{\min} = \eta - (a - bx) / (1 - x^2)$ ,  $\eta = \sqrt{1 - 2(ax - b) / (1 - x^2) + [(a - bx) / (1 - x^2)]^2}$ ,  $a = (R^2 + G^2) / (-4m_0 m_{nk})$ ,  $b = RG / (-2m_0 m_{nk})$ .

Для малых значений модуля эллиптических функций  $k$  решение (14) упрощается [5]:

$$\cos \alpha \approx a_1 + b_1 \cos y, \quad (15)$$

где  $a_1 = (x - x_2) / 2$ ,  $b_1 = -(x_2 - x) / 2$ .

Средняя частота собственного вращения определяется выражением

$$\lambda \approx R(1 / \bar{J}_x - 1/2) + \text{sgn}(R - G) \sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}}, \quad (16)$$

где  $\omega_a = \sqrt{-m_0 m_{nk}}$ .

Частота колебаний по пространственному углу атаки определяется выражением

$$\omega \approx 2 \sqrt{\omega_a^2 + \frac{R^2}{4}}. \quad (17)$$

С учетом соотношений (4), (15) после выполнения интегрирования (13) получим следующие условия возникновения резонансов:

— если начальное движение соответствует „прямой“ прецессии  $G > R$ , то в системе имеют место резонансные соотношения частот  $\omega = -4\lambda$ ,  $\omega = 2\lambda$ ,  $\omega = 4\lambda$ ;

— если начальное движение соответствует „обратной“ прецессии  $R > G$ , то в системе имеет место резонансное соотношение частот  $3\omega = 4\lambda$ .

Учитывая выражения (16) и (17), получаем формулы для определения критического значения продольной угловой скорости наноспутника, при котором выполняются условия возникновения резонансного движения:

— для соотношения частот  $\omega = -4\lambda$  и  $3\omega = 4\lambda$ :

$$\omega_{\text{хкр}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{J}_x + \frac{3}{16} \bar{J}_x^2}}; \quad (18)$$

— для соотношения частот  $\omega = 2\lambda$ :

$$\omega_{\text{хкр}} = 2 \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{J}_x - \frac{3}{4} \bar{J}_x^2}}; \quad (19)$$

— для соотношения частот  $\omega = 4\lambda$ :

$$\omega_{\text{хкр}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\omega_a^2}{1 - \bar{J}_x - \frac{5}{16} \bar{J}_x^2}}. \quad (20)$$

На рис. 1 представлены зависимости  $\omega_{\text{хкр}}(H)$  для наноспутника CubeSat 3U ( $J_x = 0,005 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_n = 0,025 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $\Delta x = 0,05 \text{ м}$ ), при которых выполняются условия возникновения его резонансного движения, кривые 1, 2, 3 соответствуют выражениям (18), (19), (20).

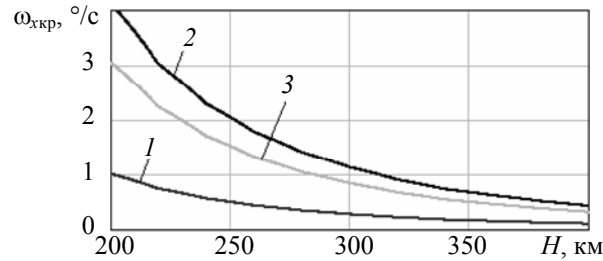


Рис. 1

Для примера на рис. 2, а—г показано резонансное изменение пространственного угла атаки наноспутника CubeSat 3U при различных начальных условиях движения:

— рис. 2, а — начальная высота полета  $H = 242 \text{ км}$ , начальное значение пространственного угла атаки  $\alpha_0 = 20^\circ$ , начальное значение угла собственного вращения  $\varphi_0 = 0$ , начальное значение поперечной скорости  $\omega_{z0} = 1 \text{ }^\circ/\text{с}$ , продольная угловая скорость  $\omega_x = 0,5 \text{ }^\circ/\text{с}$  (начальное движение соответствует „прямой“ прецессии  $G > R$ , резонансное соотношение частот  $\omega = -4\lambda$ );

— рис. 2, б —  $H = 300 \text{ км}$ ,  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega_{z0} = 0 \text{ }^\circ/\text{с}$ ,  $\omega_x = 0,26 \text{ }^\circ/\text{с}$  ( $R > G$ ,  $3\omega = 4\lambda$ );

— рис. 2, в —  $H = 289 \text{ км}$ ,  $\alpha_0 = 30^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega_{z0} = 0,8 \text{ }^\circ/\text{с}$ ,  $\omega_x = 1,3 \text{ }^\circ/\text{с}$  ( $G > R$ ,  $\omega = 2\lambda$ );

— рис. 2, г —  $H = 283 \text{ км}$ ,  $\alpha_0 = 15^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega_{z0} = 0,6 \text{ }^\circ/\text{с}$ ,  $\omega_x = 1 \text{ }^\circ/\text{с}$  ( $G > R$ ,  $\omega = 4\lambda$ ).

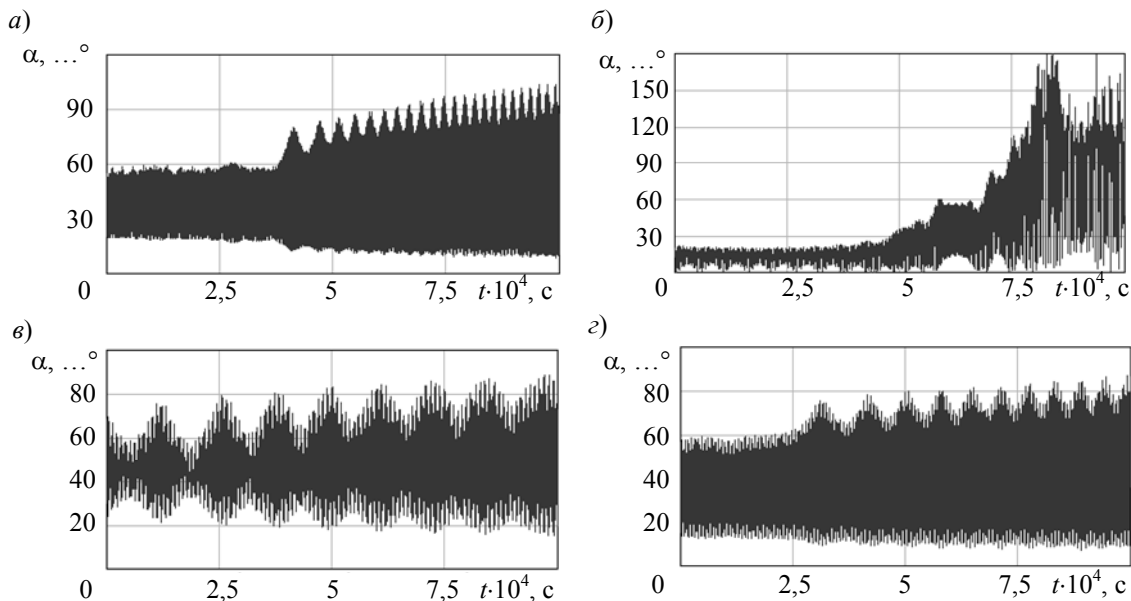


Рис. 2

Таким образом, показана возможность возникновения резонансных режимов движения наноспутников стандарта CubeSat при орбитальном полете, учет которой позволит повысить эффективность работы системы ориентации наноспутника при решении им целевых задач на низких орбитах.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-79-20215).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rawashdeh S. A., Lumpp J. E., Jr. et al.* Aerodynamic stability for CubeSats at ISS Orbit // *JoSS*. 2013. Vol. 2, N 1. P. 85—104.
2. *Shakhmatov E., Belokonov I., Nikitin A., Shafran S., Timbai I., Ustiugov E.* SSAU project of the nanosatellite SamSat-QB50 for monitoring the Earth's thermosphere parameters // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 104. P. A139—146.
3. *Белоконов И. В., Тимбай И. А.* Выбор проектных параметров аэродинамически стабилизированного наноспутника // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2016. Т. 59, № 6. С. 450—458.
4. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 168 с.
5. *Aslanov V. S., Boiko V. V.* Nonlinear resonant motion of an asymmetrical spacecraft in the atmosphere // *Cosmic Research*. 1985. Vol. 23(3). P. 341—347.
6. *Zabolotnov Yu. M., Lubimov V. V.* Application of the method integral of manifolds for construction of resonant curves for the problem of spacecraft entry into the atmosphere // *Cosmic Research*. 2003. Vol. 41 (5). P. 453—459.
7. *Балк М. Б.* Элементы динамики космического полета. М.: Наука, 1965. 340 с.
8. *Platus D. H.*, Angle of attack convergence windward meridian rotation rate of rolling re-entry vehicles // *AIAA Journal*. 1969. Vol. 7, N 12. P. 2324—2330.
9. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
11. *Aslanov V. S.* Determination of the amplitude of three-dimensional oscillations of a ballistic vehicle with a small asymmetry during atmospheric entry // *Cosmic Research*. 1980. Vol. 18 (2). P. 141—146.

*Сведения об авторах*

- Игорь Витальевич Белоконов** — д-р техн. наук, профессор; Самарский университет; межвузовская кафедра космических исследований, E-mail: ibelokonov@mail.ru
- Иван Александрович Тимбай** — д-р техн. наук, профессор; Самарский университет; межвузовская кафедра космических исследований, E-mail: timbai@mail.ru
- Улжалгас Мауленовна Оразбаева** — аспирант; Самарский университет; межвузовская кафедра космических исследований, E-mail: orazbaeva2012@bk.ru

Поступила в редакцию  
14.02.18 г.

**Ссылка для цитирования:** Белоконов И. В., Тимбай И. А., Оразбаева У. М. Резонансное движение наноспутника стандарта CubeSat на низких круговых орбитах // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2018. Т. 61, № 5. С. 458—464.

**RESONANT MOTION OF NANOSATELLITE OF CUBESAT STANDARD  
IN LOW CIRCULAR ORBITS**

**I. V. Belokonov, I. A. Timbai, U. M. Orazbayeva**

*Samara National Research University, 443086, Samara, Russia  
E-mail: timbai@mail.ru*

Resonance modes of motion relative to the center of mass of an aerodynamically stabilized nanosatellite of the CubeSat format in low circular orbits are investigated. A feature of such satellites, with the shape of rectangular parallelepipeds, is the dependence of the aerodynamic torque on the spatial angle of attack and angle of proper rotation, which creates the prerequisites for the resonance appearance. Resonance manifests itself in a sharp change in the amplitude of oscillations along the spatial angle of attack,

when a linear integer combination of the frequency of oscillations of the spatial angle of attack and the mean frequency of proper rotation turns out to be close to zero. Formulas are obtained for determining the critical value of the longitudinal angular velocity of the nanosatellite, under which the conditions for the appearance of resonant motion are satisfied.

**Keywords:** CubeSat standard nanosatellite, aerodynamic moment, resonance modes of motion, angle of attack

**Data on authors**

- Igor V. Belokonov** — Dr. Sci., Professor; Samara University, Interuniversity Department of Space Research; E-mail: ibelokonov@mail.ru
- Ivan A. Timbai** — Dr. Sci., Professor; Samara University, Interuniversity Department of Space Research; E-mail: timbai@mail.ru
- Ulzhalgas M. Orazbayeva** — Post-Graduate Student; Samara University, Interuniversity Department of Space Research; E-mail: orazbaeva2012@bk.ru

**For citation:** Belokonov I. V., Timbai I. A., Orazbayeva U. M. Resonant motion of nanosatellite of CubeSat standard in low circular orbits. *Journal of Instrument Engineering*. 2018. Vol. 61, N 5. P. 458—464 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-5-458-464